數學傳播 33卷4期, pp. 30-46

# 統計思維

黃文璋

## 前言

美國著名的小說家馬克吐溫(Mark Twain, 1835−1910), 在 1907年的自傳裡, 引用曾任英國首相的迪斯雷利 (Benjamin Disraeli, 1804−1881) 的話:

> There are three kinds of lies: lies, damned lies, and statistics (有三種謊言: 謊言, 可惡的謊言, 及統計)。

由於馬克吐溫的高知名度, 這句話因他說了之後, 便廣爲流傳了。

大家都學過多年數學, 對於爲什麼要學數學可能會較清楚。原因之一當然是生活上, 及專業上, 會用到一些數學, 也就是數學可視爲一種工具。而對一個數學學通的人, 會有什麼特質也還算清楚。不外是較有邏輯, 以及計算較精準等, 大抵是人們所喜歡的特質。

近年來, 中學數學教科書中, 統計的份量增加不少。進入大學後, 不少學系也都要學統計。看起來統計學似乎愈來愈重要。但我們一方面看到有人做決策時, 非有統計不可, 把統計當護身符。卻也會看到有如馬克吐溫者, 對統計嗤之以鼻。即使在學術界, 有些人以爲統計不過就是數學; 但有些統計學者, 會一再強調統計與數學是完全不一樣的。看起來統計的內涵似乎不易令人掌握。比如, 我們可能知道什麼是很有經濟頭腦, 什麼是很有文學細胞, 以及什麼是很有音樂素養。那什麼是很有統計頭腦? 統計細胞? 或統計素養? 就不易講得明白了。

底下我們試圖藉由闡釋統計學裡的思維方式, 來略化解前述關於統計內涵的疑惑。首先來看, 統計學究竟在做什麼?

如同其他科學的學門, 統計學也是要告訴人們一些結果。對待釐清的事, 給出一些推論。我們可以簡單地說, 統計學裡所能達到的是:

1. 允許誤差下的機率保證,
2. 允許誤差下的無罪推定。

在數學裡所探討的多半是*必然性*的問題。當它說 1就是 1, 不會有些微誤差。而一命題一旦被證明是對的, 問題就底定, 不會有例外, 除非你能找出證明的漏洞。而統計裡, 是在處

理隨機性的問題。它允許誤差, 沒有誤差反令人懷疑其中有假。統計裡也會拍胸脯保證, 但它的保證, 都是機率式的。而且通常所能保證的機率, 不但不是百分之百, 還附有誤差。金庸在 “倚天屠龍記” 一書裡, 塑造出一個布袋和尚 “說不得”。統計裡則處處是 “說不準”。例如, 宣稱有百分之九十五的機率, 某飲料的容量, 介於 326cc 至 331cc 間, 就是一典型的統計保證。雖有人說統計與算命的工作性質類似。但在統計裡, 少有鐵口直斷的, 總顯出有點保留的樣子。

我們很少企圖經由統計, 去證明那一件事一定是對的。你想探索真相嗎? 真相就留給上帝吧! 要知在隨機世界中, 真相常難以大白。一切都是假設, 只看你接受那一個而已。而接受, 就如在教堂裡, 當新娘點頭說 “我願意”, 並不表示這位新郎就真正是最適合她的。只不過是 “目前她願意接受”。同樣地, 在統計裡接受不表示爲真, 拒絕也不表示爲僞。而接受或拒絕, 採用的是類似刑事訴訟法 (第 154條) 裡, *無罪推定*的精神。只是不像法庭上, 法官敲擊法槌後所做的宣示之不容置疑。統計學家的判定, 往往還會給出誤差。

統計學裡的某一方法, 常對應人們的某種思維方式。由於人們有不同的思維方式, 皆有其道理, 各有適用的時機, 因此也就有種種的統計方法。這些方法的優劣, 有時是可以比較的, 但仍是允許誤差下的機率式比較。

機率及誤差, 構成統計裡的思維之兩大支柱。因而發展出統計學裡所著重的幾項要點, 即善用資訊, 了解變異, 相信機率, 合理估計, 無罪推定, 及紙上談兵等。我們將分別來說明。

## 1. 善用資訊

在柯南道爾 (Conan Doyle) 著的 “桐山毛櫸山莊” (The Adventure of the Copper Beeches) 一書裡, 福爾摩斯 (Sherlock Holmes) 說:

> “ Data! Data! Data! ” he cried impatiently. “ I can’t make bricks without clay. ”

沒有規矩不能成方圓, 沒有黏土不能做磚, 沒有資料 (data) 則無法做決策。福爾摩斯可以依命案現場的一些蛛絲馬跡, 推測凶嫌可能慣用左手, 或可能經過一片果園。算命看相者, 所仰賴的也是資料。收集很多不同的面相及八字等的命運, 當 “閱人多矣”後, 自然容易依據人的面相等, 分析其前程。那些善於看透人性者, 不也是閱人多矣嗎? 做決策要有資料, 每一項資料, 都可能是有用的資訊。統計學家的本事要能發揮, 就得善用資訊。因此對於統計學家, 資料有如老鼠所愛之大米。

有人敲門, 是男是女? 大約各半吧! 這是因基於社會上男女比例差不多是 1比 1。但如果你從門縫看到來者穿裙子, 就會覺得極可能是女生。因在經驗裡, 少有男生穿裙子的。如果你知道來者是個數學系的學生, 那仍依你的經驗, 敲門者是男生的機率可能約爲 8成。原

來男女各 2分之 1的機率, 是在沒有其它資訊下的假設。一旦有更多的資訊, 此假設便不必然仍存在。如果這些你可以接受, 那也應能接受在統計裡, 機率值是會變的, 這就是所謂條件機率。

只是有些明明是有用的資訊, 卻不見得容易看出。在某公園中, 你新認識一個朋友。聊啊聊, 他指著遠方說 “我太太與小孩都在那兒。” 你一看, 有個媽媽跟兩個小孩在一起, 其中一個是女孩, 另一個小孩蹲在地下抱著狗, 無法得知是男是女。如果仍假設生男生女的機會各半, 那蹲著的小孩, 是男是女的機率, 不應也就各爲 2分之 1嗎? 你大概不會覺得這是什麼難題吧! 只是這裡面卻有些玄機。一家庭兩個小孩的性別有男男, 男女, 女男及女女等 4種可能 (其中男女表老大爲男, 老二爲女, 餘類推), 機率各爲 4分之 1。今已知有 1女孩, 便知必爲男男之外的 3種可能, 機率各爲 3分之1, 而其中有兩種情況此家庭有男孩。故抱著狗的那小孩是男孩之機率爲 3分之 2, 是女孩之機率爲 3分之 1。如果抱著狗的那個小孩明顯地比較小 (是老二), 則兩個小孩的性別成爲女男及女女兩種可能。故抱著狗的那個小孩, 是男是女的機率各爲 2分之 1。你可能沒想到吧! 知道一小孩之排序 (老大或老二), 居然會影響對其性別之判斷。看來不要輕易放過任何資訊。

在上例中, 如果有進一步的資訊, 比方說較小的孩子一向比較愛抱狗, 或男孩一向比女孩愛抱狗, 那對於抱狗小孩爲男或女之判斷, 也將隨之而變。而如果由之前的聊天中, 你獲知朋友兩小孩的性別一樣, 則抱狗的小孩不必猜了, 就是女孩。

機率值會變, 是機率的一特性。視新的資訊產生, 對一事件機率之判斷, 也宜隨之而變。這原本是合理的, 隨機應變是也。如果我們說人不宜墨守成法, 不能不知合變, 那就也該了解能善用資訊, 以隨機應變的重要。我們的決策, 應有如唐朝柳宗元在 “袁家渴記” 中所寫的 “搖颺葳蕤, 與時推移”。

稀鬆平常的草, 進了牛的肚子後, 卻能產出頗富營養的牛奶。巧妙各有不同, 資料進了統計學家手中, 有各種科學的方法, 將其轉化爲有用的資訊, 繼而做出決策。我們要學習這些統計方法, 以協助我們做出較好的決策。但更要緊的是, 我們要讓自己的思考是具隨機性的, 有福爾摩斯的敏銳, 留意任何不起眼的資料。因表面上看起來似乎沒什麼用的資料, 有時對決策的影響, 能產生如 “蝴蝶效應” (butterfly effect) 般的巨大。

我們固然常想多得到一些資訊, 但有時又想儘量減少資訊的透露出去。例如, 號碼鎖、提款卡, 或上網的密碼等, 都會希望所設定的密碼, 要愈難被猜中。如何減少資訊? 不少人在製密碼時, 傾向挑選與自己相關的數字或文字。如生日, 女兒名字等, 以較易記憶。但這些資料, 他人其實極易獲得, 往往試了幾次便猜中了。又如, 有人以 1, 2, 3, 4, 5, 6 爲提款卡密碼, 以爲萬無一失, 別人豈那麼巧也想到? 偏偏人同此心, 拾獲 (或偷取) 其提款卡者, 有時第一個試的就是這組號碼。香港曾有實例發生。另外, 你看過艾爾帕西諾 (Al Pacino)

主演的 “針鋒相對” (Insomnia, 2002) 嗎? 他將一把槍藏在空調排氣口裡, 以爲應很隱密, 結果當然是被找到。沒有破不了的密碼, 端看要花多少時間, 我們只能儘量降低密碼被破解之機率。運氣不論, 有什麼好方法製密碼?

一袋中有 9個白球及 1個黑球, 隨機取 1個球, 你猜取中什麼? 當然要說白球, 猜中的機率是 0.9。如果袋中有 5個白球及 5個黑球呢? 就比較難猜了, 猜中的機率是 0.5。樂透彩開獎, 一般的設計是頭獎號碼隨機產生, 也就是讓那幾百萬, 或上千萬種組合的號碼, 每一組合出現的機率都一樣, 且每次開獎與以前都毫無關連。則即使收集很多以往開出的號碼, 對下一期所開出號碼的預測, 並無任何幫助。換句話說, 沒有明牌是最難猜的。

所以, 你要製密碼, 就宜用抽籤或亂數表產生。要知一般而言, 人的天性是沒有隨機性的 (見黃文璋 (2004) 一文)。老師上課點學生號碼上台, 他以爲是隨機地點, 其實不自覺中, 就是有些偏愛的號碼。一學期下來, 往往輕易被學生識破。以抽籤是較好的方式, 學生較難猜誰會被點中。同理要藏東西, 不妨將能藏東西的地點編號, 隨機抽一號。依這樣的方式, 所提供的資訊最少。

## 2. 了解變異

男生 1人重 32公斤, 10人共重幾公斤? 這是小學裡的數學題目。長大些後, 你知道即使是同年級的男生, 也不會每個人都同重。又不只是不同的人, 同一個人投擲標槍, 同一個人跑步, 同一個人的體重, 甚至應爲一常數的二定點之間距, 每次量測可能都有些差異。變異! 你開始注意到變異, 各種數量不再全然是常數。逐漸地, 你也開始有了隨機的概念。你知道考試總有些不可測的因素 (就姑且說是運氣吧)。你也知道有些人命不錯, 含著金湯匙出世。但你又聽說命好不如運好, 運自然是屬於隨機的。

宇宙的運轉, 有必然性與隨機性交錯著進行。例如, 我們知道哈雷慧星每76年接近地球一次 (這是必然性)。只是雖能知道 76年後的事, 但明天會不會下雨? 就不是那麼確定了 (隨機性)。又如, 將手上的銅板鬆開, 在中學物理課程裡學過, 如果忽略空氣阻力, 則在高度固定下, 銅板落地所需時間, 是個定值。但落地後那一面朝上? 就無法預知了。

根據我們的經驗, 也有醫學上的依據, 龍生龍鳳生鳳, 較高的人生出的小孩往往也較高, 但仍會有些變異。龍兄鼠弟, 例外一向不少。所謂一樹之果有酸甜之別, 一母之子有賢愚之分。努力就有好收穫? 聰明的人成績就較好? 諸如努力, 才智及遺傳等, 對一個人的未來, 通常很有決定性的影響。但世事多變, 也不盡然就都如此。意外、豈有此理之事屢有發生。造物者讓人們對未來, 知道大致會發生那些事, 及如何發生。但又不想讓人們對於未來, 能完全掌握。要知在隨機世界裡, 必然性使人們願意事先好好準備, 而隨機性則使人們對未來, 充滿著盼望與戒慎恐懼。光有必然性的世界, 毫無變異, 對未來缺乏盼望, 將讓人們少

了努力的動機。而光有隨機性的世界, 只靠運氣, 將令人失去積極認真的企圖心。三分天注定, 五分靠打拼, 兩分靠運氣。我們必須敬佩造物者這樣的設計。

由於變異無可避免的存在, 我們所能做的, 便是要了解變異, 有時還要設法減少變異。以抽樣調查某產品製造的良品率爲例。一個常見的作法是, 抽出的產品若爲良品, 以 1表示, 不良品則以 0表示, 如此得到一個像是 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, ... 的數列。再以抽至第 $n$ 次後, 總共所得到 1的個數, 除以 $n$, 當做良品率之近似值。也就是以平均 1 出現的次數, 來估計良品率。人們習於這樣做, 而且似乎也知道, 如果想要估計夠精準, 也就是想讓樣本的平均良品率, 與實際的良品率之差異小些, 則樣本數 $n$便要較大。付出較多的代價 (取樣大), 以換得更大的準確性 (變異小些), 這是合理的。諸如銅板出現正面的機率, 湖裡某種魚所佔之比率, 選民對某候選人的支持度等, 這類 0、1; 正、反; 是、否; 及成功、失敗等, 兩個結果的現象, 想知道其中一種現象出現的機率到底爲何? 都可用上述 “平均成功率” 來表示。反之, 假設你原本便知良品率, 現有人並未抽樣, 而是以自認隨機的方式, 寫出一串 0, 1的數列。由於如在第1節中所指出, 人的天性很少具有隨機性, 因此經由統計檢定那一串揑造出來的 0, 1數列, 應會讓你懷疑這串數列, 不是實際抽樣得到的。造假者不易以 “隨機” 一詞來強辯。這是我們的幸運, 雖世事多變, 但萬物有常。也就是在隨機世界中, 是存在所謂*隨機法則*的。法則之一, 便是前述平均法的理論依據 — *大數法則*(law of large numbers)。原來那個有如無理數不循環的小數部分, 看似沒有規律的 0, 1數列, 其實被大數法則規範 0, 1出現的情況。但既然是隨機數列, 則不論樣本數 $n$ 多大, 都不能保證前述平均值, 就剛好等於良品率。那誤差究竟有多大?

在數學中, 常在求近似值。當以一多項式, 來近似一比較複雜的函數時, 必須要能給出誤差大小, 否則這種近似的用途便不大。射飛標, 有時偏右有時偏左, 不能只說平均會命中紅心。一支職棒球隊的平均年薪雖很高, 但除了少數幾位身價超高者外, 很多球員可能只得溫飽。還要知道薪水的變異, 才能對整支球隊的薪資結構, 有較清晰的概念。另一個重要的隨機法則 — *中央極限定理* (central limit theorem), 便告訴我們, 在一些並不太強 (strong) 的條件下, 量測所得之誤差有*常態分佈* (normal distribution)。與數學中的誤差不同, 此處誤差大小是隨機的。但誤差之散佈情形, 則能描述。

在統計裡, 常在做預測、做估計。本質上是在做*以偏概全*的事。雖偏卻能概全, 這是統計學家的本領。但如果樣本實在太偏差, 沒有代表性, 那就真是以管窺天, 見不到全貌了。一個常見的條件是, 各次取樣要彼此沒有關連, 即這些樣本須*相互獨立*, 而且這些不同的樣本要*分佈相同*。以估計銅板出現正面的機率爲例, 不能每次投擲, 只是往前輕輕一丟, 這樣每次大約都得到相同的面 (不獨立)。另外, 也不能每次所用的銅板, 出現正面的機率不同 (分佈不同)。

但*獨立且分佈相同*的假設容不容易辦到呢? 如果是投擲銅板, 此假設大致會成立。如果要藉由隨機地投擲芝麻, 落進一圓中的芝麻數, 與落進其外切圓的芝麻數之比值, 來估計

圓周率 $\pi$, 可能也大致還可以。但對於要處理人的問題, 就不是很容易辦到了。一方面不同的人之間, 就是有差異性。任取 $n$ 人, 每人支持某候選人之機率皆相同的假設, 比投擲一銅板 $n$ 次, 每次出現正面機率皆相同之假設, 強得太多。另一方面, 人可不像銅板般, 會馴服地讓你重覆實驗。以民意調查爲例, 人不見得會誠實回答問題, 甚至還會改變主意。所以實際應用統計方法時, 要更謹慎, 否則造成的變異, 會比預期的大很多。

事實上, 即使在弱一些的條件下, 大數法則及中央極限定理也仍適用。在大量的觀測後, 大數法則指出, 所得到的平均值, 會接近該得到的值。平均值會在此該得到的值附近波動。至於誤差, 爲一隨機的量。中央極限定理給出, 誤差差不多有*常態分佈*。科學上常要做量測。被認爲是有史以來三大數學家之一的*高斯* (Carl Friedrich Gauss, 1777−1855), 曾研究*誤差理論*。在一些假設下, 他亦導出量測的誤差有常態分佈。因此常態分佈又稱*高斯分佈* (Gaussian distribution)。德國現在用歐元, 往昔用馬克。德國10馬克, 是以高斯爲人像。高斯在數學上有諸多重要成就, 但在 10馬克上陪伴高斯的, 不是其他, 就是一常態分佈的曲線。可見此分佈不只在統計, 甚至在科學上之重要。

最後, 必須要了解的是, 那一串 0, 1數列, 1出現的 “*相對頻率*” (即出現次數除以觀測次數 $n$), 會接近 1出現的機率。但此不表 1出現的頻率 (即出現總次數), 會接近我們所期望1該出現的次數。以投擲一公正銅板爲例。對於 $n$ 爲 2, 與 $n$ 爲 10, 你認爲是前者, 還是後者較易出現正反面數相同? 答案是前者, 發生之機率爲 2分之 1, 後者發生之機率爲 1,024分之 252, 約爲 0.246, 不到 4分之 1。若 $n$ 爲 10,000, 此機率將更小, 約爲 0.008。即若 $n$ 愈大, 出現之正面數, 將在投擲數之半附近一更大的範圍內波動 (變異增加), 愈易偏離所期望的投擲數之半。大數法則是針對平均, 而非和。也就是所得之正面數除以投擲數, 才會愈來愈接近 (變異減小) 1/2。很多人不明白這點, 看到樂透彩已經開了這麼多期, 怎麼各號碼出現的頻率差異愈來愈大, 以爲真有氣比較旺的號碼, 或真有冷門號碼。大數法則是告訴我們, 當開的期數愈多 ($n$ 愈大), 任一號碼出現的*相對頻率*, 會愈來愈接近該號碼出現的機率值。相對頻率的變異會變小, 至於頻率的變異則會變大。而且這還不是專業的說法。比較正確的講法是, 當開的期數愈多時, 任一號碼出現的相對頻率, 與該號碼出現的機率值之差異, 會很小的機率將很大 (即接近1)。這是隨著 $n$ 的增大, 變異會愈來愈小的意思。

## 3. 相信機率

有法國牛頓之稱的數學家*拉普拉斯* (Pierre-Simon Laplace, 1749−1827) 曾說 “大部分生活中最重要的疑問, 都只是機率的問題”。在隨機世界裡, 機率一詞大家琅琅上口, 但一般人是否真了解機率的涵意呢?

曾在網路上看到回答生雙胞胎的機率之底下一段話, 我們一字不改:

> 機率是統計上騙人的東西, 許多事情要重複做 100次才有機率可言。懷孕不

> 可能 100次, 每次懷孕生雙胞胎機率是 1/89, 但單次懷孕生雙胞胎機率若不是 0%, 就是 100%。就好像問我, 50元銅幣丟到地上一次, 是蘭花機率有多少? 事實上, 50元銅幣丟到地上, 不是總統府, 就是蘭花。如果丟到地上 100次, 那麼機率就會接近 50%。如果丟到地上 1次, 蘭花的機率, 若不是 0%, 就是 100%。

回答者對機率的解釋, 雖不正確, 但說不定是不少人對機率的認知。

機率的意義是什麼? 在諸如投擲骰子, 或抽籤時, 我們常以 "相同的可能性" 來解釋機率。即骰子的6個面, 每個面出現機率皆認爲是 6分之1; 如果有 $n$ 隻籤, 每隻被抽中的機率, 皆視爲 $n$ 分之1。此一解釋, 在日常生活中, 或賭場裡, 還蠻適用的。當沒有其他資訊時, 常假設每一可能的結果, 發生之機率都一樣。第二種方式, 是以相對頻率來解釋機率。如果一位職棒選手, 過去的打擊率是 0.327, 你知道打擊率就是安打數除以打擊次數, 則一旦他站上打擊位置, 你所認爲他會擊出安打的機率, 大抵就是 0.327。這一種常見的對機率之解釋法, 還蠻客觀的。其背後之理論基礎, 就是大數法則。針對的現象, 是可以重覆觀測的。此外, 對於世界盃足球賽, 巴西封王機率爲 1成, 追上某一女孩之機率爲 6成等, 在這類情況, 並無法重覆觀測。少有女孩子會讓你追不上後, 換個方法重追一次, 再重追, $\cdots$。因此其中的機率, 是主觀的。當然有時主觀機率的產生, 也可能是依據過去一些客觀的資料。

上述三種對機率的解釋法, 有時會交錯使用, 或彼此相驗證。例如, 雖原先主觀地認爲骰子爲公正, 但投擲夠多次後, 依各面出現的相對頻率, 說不定會調整對各面機率之看法。

對機率的解釋, 並不只前述那三種。在數學上, 對於骰子, 我們也可就指定每個面會出現的機率值。這些機率值當然不能是負的, 而且加起來要是 1。這是所謂以公理化的方式引進機率, 在此不多討論。無論如何, 機率絕非 "騙人的東西"。要知事件在發生前才有機率可言。巴西隊一旦奪冠, 再去說該隊封王之機率爲何, 已無意義。奪冠機率再低, 贏了就是老天眷顧。奪冠機率再高, 輸了只能徒呼負負。而觀測一事件, 結果是 "不發生", 或 "發生", 而非 "機率 0%", 或 "100%"。一事件之發生機率, 不論多小, 只要不是 0, 就可能發生。而發生機率不論多大, 只要不是 1, 便可能不發生。

投擲一個公正的銅枚 100次, 正面出現的相對頻率會接近 0.5 (大數法則), 總共出現之正面數則在 50附近, 不見得會剛好等於 50。至於會不會正面數偏離 50很遠? 極端一點, 譬如說連得 100個正面? 此機率爲 0.5的 100次方, 按一下計算機, 小數點後面連續 30個 0才出現 7。除了小說裡, 這種事件, 顯然很少能見到。只是機率雖微乎其微, 卻仍是正的。事實上, 小機率事件, 就是常被人們稱爲奇蹟, 或說不可能的事件。諸位看過湯姆克魯斯 (Tom Cruise) 主演的 "不可能的任務" (Mission: Impossible) 嗎? 第一集是 1996年上映, 至 2006年已經有三集。每一集中之不可能的任務, 最後都完成了。要知 "不可能" 是口語, 並非機率裡的術語。原先你以爲不可能的事情, 只要觀測次數夠多, 就不難發生。有

人稱此爲巨數法則 (law of truly large numbers)。當小機率遇上大樣本, 其發生就不太令人驚訝了。

毛澤東在 “和郭沫若同志” 的 “滿江紅” 那首詞中, 有句 “一萬年太久, 只爭朝夕”。政治人物多半只在乎當下。對於機率, 我們則應不爭一時而爭千秋。對機率的品頭論足, 說三道四, 並不能只看少數幾次的結果。一旦觀測次數夠多後, 機率的威力就顯現出來, 這時僥倖便只能靠邊站了。有一個銅板, 出現正面機率爲 0.6。投擲若干次, 那一面出現較多次便贏。請問你要選那一面? 雖正面比反面出現的機率高, 但假設你不信邪, 偏要選反面。則若僅投擲 1次, 你有 0.4的機率贏, 不算太差。投擲 10次時, 你約有 0.166的機率贏, 也還可以。但投擲 100次時, 你贏的機率就僅約 0.016了。至於投擲 1,000次時, 你贏的機率約 $4.37 \times 10^{-11}$, 是小數點後面連續 10個 0才出現 4, 已極接近 0了。經年累月下來, 我們要做許多許多的決策, 少鐵齒, 依機率行事, 還是較明智的。

幾年前有本 “與天爲敵” (英文書名是 Against the Gods), 曾一時造成洛陽紙貴。此書宣稱運用機率及統計方法, 以控制風險, 因而能 “趨吉避凶, 天威不再難測, 人類的未來得以擺脫諸神恣意的作弄”。有些勵志的書裡則說 “雙手萬能, 人定勝天”。大家也都知道, 一直有人留連賭場, 有人沈迷彩券, 追求明牌, 想要一夕致富。我們的看法是, 趨吉避凶, 與天爲敵, 及人定勝天等, 都是奢望。與天爲友才是對的。而對於賭, 就以樂透彩爲例。號稱公益彩券, 發行銀行拿出來當獎金的, 約是總投注金額的 56%。你想豪賭, 拿出 10萬元投入, 中的獎金繼續投入。每週開兩期, 你知道 1個月也就是 8期後, 會成爲多少錢嗎? 隨機現象, 當然不一定, 說不定你財星高照, 8期皆中頭獎。只是不難理解, 你的錢將大約以每期 0.56的比例下降。8期後約成爲 10萬元乘上 0.56的 8次方, 差不多是 967元, 下降速度驚人。投資彩券, 將會如紅樓夢四十七回裡鳳姐所說 “這一吊錢, 頑不了半個時辰, 那裡頭的錢就招手叫他了。” 沒辦法, 機率是這樣告訴我們。十年才能贏得青樓薄倖名。但想跟樂透彩拼的人, 要贏得公益名, 所花的時間, 可是超乎想像的短。

你可以拼經濟, 也可以拼政治。但在隨機世界中, 卻要相信機率, 而不要挑戰機率。

## 4. 合理估計

從前有一個賣油條的小孩, 他一向把賣得的錢, 都放在盛油條的籃子裡。某日由於尿急, 於是把籃子放在一塊大石頭上, 解放去也。過一會兒回來, 晴天霹靂, 籃子裡的錢都不見了。他哭著跑去告訴縣官。縣官聽了後, 叫人把石頭抬來審問。雖一再恫嚇, 石頭一句話也不說。縣官氣了, 叫人拿棍子來打石頭。只是即使打到棍子斷了, 石頭仍不說話。一旁看熱鬧的人都笑了起來。縣官更生氣, 罰圍觀者每人拿兩個銅錢, 扔進一個盛滿水的盆子裡。突然, 縣官指著一個人說 “偷錢的人就是你。” 那人大呼冤枉, 眾人也不解。縣官解釋說, “那

小孩是賣油條的, 他的錢上都沾著油。別人的錢扔進水裡都沒有油浮上來, 只有這個人扔錢進水後, 有油浮上來, 可見錢是這人偷的。” 那人俯首認罪, 衆人皆心服。

憑口袋裡的錢有油, 就認定他偷了賣油條小孩的錢? 如果有人收到賣油條者找的錢, 不也就沾著油嗎? 這則民間故事, 有不同的版本, 如 “包公審錢案”。在舊約聖經列王紀上第 3章, 當二婦人爭奪小孩不下時, *所羅門王* (King Solomon) 叫人拿刀來將小孩劈成兩半, 一人一半。二婦人反應不同, 一位就放棄爭取了, 一位則贊成將小孩劈了。所羅門王遂將小孩判給放棄者, 因他認爲生母是不忍心讓小孩成爲兩半的。這種包公、所羅門王式的智慧, 與教室玻璃破了, 老師先從平常最調皮者問起的原理類似: 當從幾個可能性裡做挑選時, 優先挑最可能的情況。會不會誤判? 當然也是會的。淸朝劉鶚的 “老殘遊記” 中, 有一 “剛弼斷案” 的故事就是例子。你以爲很可能會怎麼樣, 有時卻不一定。要有隨機的概念, 做決策時, 不能剛愎自用。*聖經*列王紀上第 4章, 說 “所羅門的智慧超過東方人和埃及人的一切智慧”。這種人們在做選擇時, 常採用的所羅門王式的思維, 在統計裡就發展出*最大概似法* (method of maximum likelihood) — 依發生機率之最大者來決定估計值。此估計法有很多好的性質, 常也能得到不錯的估計量。

美國 NBA 職業籃球賽, 各球隊互有勝負, 很難說那一球隊才是最強。在常規比賽裡, 每支球隊要賽 82場, 各區勝率最高的 8隊可打季後賽。所謂勝率, 就是贏的場次除以比賽場次。爲了維持比賽之可看性, NBA 有一套選秀機制, 使各隊實力不會很懸殊。有時全季排名第一者, 勝率還不到 6成。以一個球季多場比賽後的勝率, 決定誰是今年較強者, 得以參加季後賽, 是職業球賽常採的作法。諸如估計某項手術的成功機率, 估計生三胞胎的的機率, 也是常採用這種以*相對頻率*來估計的想法。因而就發展出*動差法*(method of moments)。爲統計中一重要且常是不錯的估計法。

不論生活上及科學上, 人們常在做估計。估計這綠燈過得去嗎? 估計追上心儀女孩子的機率。估計這樣的成績, 能不能上台北大學統計學系。估計中國大陸野生熊貓的數量等。比較嚴肅一點的, 估計台灣明年經濟成長率, 估計 20年後台灣每年新生兒人數。百家爭鳴, 可以有各種估計法。有道理的估計法, 多半有其優點, 各有其適用的時機。就如武俠小說裡, 少見有那一種武功是天下無敵的。而一個停止的時鐘, 每天都有比一天只慢千分之 1秒的鐘還準的時刻。統計裡的估計量, 是有評比方法的。但所謂優劣, 乃依評比指標而定。各擅勝場, 不會有那一估計法, 是永遠最佳的。我們再給一種估計法。有時依據過去經驗, 或主觀上的認定, 會有一些事先的看法。比方說, 一表人才, 又彬彬有禮的人, 我們對他的初步印象, 很可能會不錯。有姣好的外表, 總是無言的推薦。學歷不錯者, 常也會吸引人, 血統仍是頗具參考價值的。但相處一段時間後, 只見做事顛三倒四, 對其評價往往就會做些調整。又如, 對銅板出現正面的機率, 我們覺得銅板是中央銀行製造的, 不致於太偏頗, 應就在 0.5 的附近, 如 0.49至 0.51間。至於這區間中的點, 可能性就認爲都差不多。換句話說, 對於正面出現的機率, 你覺得有一事先的分佈。這分佈, 是所謂在區間 0.49至 0.51的均勻分佈

(uniform distribution)。但實際投擲多次後, 如果正面出現的相對頻率是 0.68, 這時你總不致於還堅持出現正面的機率應在 0.49至 0.51均勻分佈。一意孤行畢竟是不好的, 雖事先有主見 (即使主觀, 有時也仍會參考過去的資料), 但依觀測後的結果, 調整原先的看法, 這也是人們常有的一種思維方式。在統計裡, 就發展出貝氏法 (Bayesian approach)。

在論語先進篇中, 孔子要幾個弟子分別講其抱負, 其中出現了一些數字, 像是 “方六七十, 如五六十”, 又如 “冠者五六人, 童子六七人”。我們常想知道明天溫度爲何? 氣象局提供一個很明確的預報 — 27度。病人能活多久? 醫生說 3個月。但一天中的溫度, 從早到晚總是有差異的。病人也少有因醫生的直斷, 就恰好 3個月後死亡。因此有時我們覺得給個範圍, 如孔子那幾個弟子的作法, 可能是更清楚的描述。統計裡便發展出信賴區間 (confidence interval) 估計法。

以某候選人的支持度爲例。一個常見的講法是 “支持度是 0.35, 在百分之九十五的信心水準下, 抽樣誤差在正負三個百分點以內”。或者說有百分之九十五的信心水準, 支持度介於 0.32至 0.38間。或說區間 (0.32, 0.38) 是支持度之 95%信賴區間。信心水準又稱信賴係數, 而 95%就是 0.95, 其實是一機率值。只是爲什麼不稱機率而稱信心水準, 到底有什麼信心? 究竟在信賴什麼?

政治人物慣說 “我對 XXX 是百分之百信賴”。實則彼此貌合神離, 勾心鬥角, 毫無互信可言。對於估計一銅板出現正面的機率 $p$, 點估計是以一個值 (稱做估計量) 來估計。雖然明確, 但估計值要恰好等於 $p$, 其機率常是微乎其微, 甚至可說是 0。因此我們對以單一的值來估計 $p$, 信心自然是不太夠。區間估計是以一隨機區間來估計 $p$。此區間表 $p$ 之可能落在的範圍。信心水準就是指 $p$ 會落在此區間的機率。就估計的觀點, 一區間當然較一點更可信賴。我們更有信心此區間會包含 $p$。因此稱此區間爲信賴區間, 有其道理。只是一旦取完樣本, 所得之信賴區間, 爲一確定的區間。這時該固定區間, 或包含 $p$, 或不包含 $p$。一翻兩瞪眼, 已不能再說會包含 $p$的機率, 是原先的諸如 0.95, 或 0.99了。這是對這些 95%, 或 99%, 避開機率一詞, 而稱爲信心水準的原因之一。

給出一估計之明確的信心水準, 而不像有些人, 常掛口中, 可信度不高的 “百分之百信賴”, 或 “完全有信心”, 反而使此區間更可信賴。至於有多信賴? 信心水準就是給出信賴程度。

從估計的角度, 在同一信心水準下, 信賴區間愈狹窄愈好, 這表示估計愈精準。只是通常這要增加樣本數才行, 得有成本的考量。又大家是否好奇, 爲什麼不就給百分之百的信賴區間? 不要有誤差不是很好嗎? 只是若要零風險, 這種區間往往是很長的, 反而失去參考價值。此有如百分之百追得上的女孩子, 男生的興趣通常可能不太高。百分之百成功的投資, 不是你沒興趣, 就是輪不到你。在隨機世界中, 變數太多, 一切的估計, 都不過是個參考。追求太高的信心水準, 有時得付出不小的代價, 不見得值得。

## 5. 無罪推定

人們常求公平或公正。以簡單的兩人分蛋糕爲例, 若雙方皆不願拿得比較小, 那有什麼好方法來分? 你切我選, 應是一個令兩人都不覺得吃虧的辦法。最好是連由誰切, 都以抽籤的方式。以免選方感覺他所得大於一半, 而切方感覺他所得只有一半。

專制時代, 寧可錯殺一百, 不能錯放一個。民主時代, 即使沒有包青天、所羅門王, 法庭上如何設計出一套, 讓人覺得較公正的判決機制? 宋朝歐陽修, 在追述其父母生前言行事蹟的 “瀧岡阡表” 一文中, 提及幼時母親曾告訴他, 其父生前爲官批文時, 對於死囚, 一向的做法是 “求其生而不得, 則死者與我皆無恨也”。以往檢察官, 若認爲法官未窮盡調查之途徑, 便判被告無罪, 會不服而提起上訴。那是因我國最高法院, 於民國 25年立下 “有罪推定原則” 之判例。經過 60餘年, 終於在民國 92年, 在刑事訴訟法裡, 修正爲 “*無罪推定原則*”。從而檢察官須善盡舉證責任, 證明被告有罪, 俾推翻無罪之推定。

法官之判決, 採無罪推定原則是較有道理的。即先假設被告無罪, 然後看在無罪之下, 爲何會有這些啟人疑竇的事證產生? 若被告無法合理交待, 只好判他有罪了。但這不就是一千年前, 歐陽修的父親 (歐陽修生於西元 1007年, 4歲喪父) 所秉持的盡力爲死囚 “求其生” 的精神嗎? 無罪推定原則, 便類似你切我選, 屬於能令檢察官與被告, 皆感到較公正的一種判決法。

無罪推定原則的影響是較正面的。假設有一被起訴者, 最後因法官認爲證據不足而判其無罪。如果他真無辜, 那此爲一正確的判決; 如果他其實有罪, 但被釋放後洗心革面, 放下屠刀, 再也不犯罪, 那也很好; 如果他因心存僥倖或其他原因, 再度犯罪, 則夜路走多後, 不見得每次都有那麼好的運氣, 終有因證據充分, 而被繩之以法的一天。但若採有罪推定原則, 被起訴者較容易被判有罪, 將造成較多的冤獄。而一旦執行刑罰, 日後如果發現原來是誤判, 就不易彌補了。

某次考試有 20道選擇題, 每道題有 4個選項。我們來看下述二情境:

1. 老師對學生說如果你們二位沒作弊, 怎會有 15題對的一樣?
2. 如果你們二位沒作弊, 怎會有 15題錯的一樣?

實際的情況是, 20題中, 有 15題較容易, 大部分的學生都能選對答案, 兩人這15題都答對, 是一件很尋常的事, 所以不能據此推定他們作弊。但要錯同樣的15題, 且選項也都相同, 這就很不尋常了。這兩個學生要說服老師他們沒作弊, 大約很難。

1933年, 波蘭人*奈曼* (Jerzy Neyman, 1894–1981), 及英國人*皮爾生* (E-gon S. Pearson, 1895–1980), 給出著名的*奈曼–皮爾生引理* (Neyman-Pearson lemma), 奠定了統計學裡的*無罪推定原則*。較我國刑事訴訟法, 早了整整 70年。奈曼–皮爾生提出了一套*假設檢定* (hypothesis testing) 的架構。在其架構中, 有一*虛無假設* (null hypothesis), 常以 $H_0$ 表之, 及一*對立假設* (alternative hypothesis), 常以 $H_a$ 表之。虛無假設通常表現況,

或我們傾向不相信者, 而對立假設則表我們傾向相信者。以樂透彩開獎爲例。42個號碼, 每次開出 6個頭獎號碼, 如果號碼是隨機產生, 每個號碼出現的機率應爲 1/7。有人懷疑 1號比較容易出現, 於是來做個檢定。先將虛無假設取爲 "1號開出的機率是 1/7", 至於對立假設則取爲 "1號開出的機率大於 1/7"。此外, 依不同的情況, 虛無假設也可以是: 喝綠茶不能減肥, 某模特兒沒有服用毒品, 新教材與舊教材效果一樣等。而對立假設則可以分別爲: 喝綠茶能減肥, 某模特兒有服用毒品, 新教材比舊教材效果好等。

大家不難想通何以 $H_0$ 被稱爲虛無假設。警方因接獲密報, 懷疑某模特兒服用毒品, 才找她來檢驗, 媒體也大肆報導。若大費周章後, 宣佈該模特兒無辜, 則輿論難免會同情該模特兒受了無妄之災。幾次這種事件下來, 警方可能會被認爲擾民了。再以法庭爲例。雖說依無罪推定原則, 但法官若認定起訴者無罪, 檢調單位其實是灰頭土臉的。所以 $H_0$ 被接受, 往往表做虛功, 回到原點, 只能接受一空的假設。

英文中的假設 hypothesis, 是由古希臘文 hypotithenai 演變而來, 科學上的假說 (或稱假設學說) 也是這個字。大家在中學的化學課程裡學過, 義大利化學家亞佛加羅德 (Amedeo Avogadro, 1777–1856), 在 1811年提出, 於相同的物理條件下, 相同體積的氣體, 含有相同數目的原子。但此觀點未被當時的科學家所接受, 因此被稱爲亞佛加羅德假說 (Avogadro's Hypothesis)。其後被證實爲真, 就改稱定律 (Avogadro's law, 或 Avogadro's Principle)。在數學裡, 我們常在證明一命題是真或僞。但在隨機世界中, 很多現象都只能視爲假設, 就看接受那一個。接受不表示就完全相信該假設爲真, 拒絕也不表該假設爲僞。就如女孩子找對象, 最後決定嫁誰, 說不定也只是認爲該男子可以接受而已。而一對象之接受與否, 其實乃視標準之高低。統計裡的假設, 經檢定後, 不論接受那一個假設, 都無法讓該假設成爲定律, 假設永遠是假設。法官判定常也是類似。所謂 "司法還我清白", 都是被判無罪者自己說的。你想探索真相嗎? 真相常難以大白。此正如 "周公恐懼流言日, 王莽謙恭下士時, 若使當時身便死, 一生真僞有誰知?" 又如日本那部著名的電影 "羅生門" (1951), 同一事件的 4位目擊者, 每個人的陳述都不同, 電影最後也沒告訴觀衆, 究竟誰說的才是真話。那 4人說不定也不是存心說謊, 而是每個人觀點及判斷不同。金庸的 "雪山飛狐" 一書中, 也有類似的羅生門情節。因此通過檢定的假設, 只是表在現況下, 比較該接受的一個選擇。接受一假設後, 常要輔以其他科學方法, 以進一步探討。

在一統計檢定裡, 不論拒絕或接受 $H_0$, 都可能犯錯。這其中有兩種錯誤, 第一型是 $H_0$ 爲真卻拒絕 $H_0$, 第二型是 $H_a$ 爲真卻接受 $H_0$。最理想的, 當然是兩型錯誤機率皆爲 0, 但通常不會有這種情況。虛無假設是要較被保護的。想想若明明各號碼出現機率相同, 卻宣佈 1號較易出可見, 造成的影響將有多大? 明明沒服毒, 卻被判定服毒, 有多冤枉? 奈曼–皮爾生的作法是, 先給定一個所能容忍的第一型錯誤之機率, 這當然是一個比較小的值。依據此機率, 決定得到什麼樣的觀測值時拒絕 $H_0$。至於此機率該多小? 乃視犯第一型錯誤的後果

有多嚴重。如果 $H_0$ 是嫌犯沒殺人, $H_a$ 是嫌犯殺人, 那所能容忍之第一型錯誤的機率, 當然要很小才行。如果對於某食品, $H_0$ 是不會致癌, $H_a$ 是會致癌, 這時就不宜過度保護廠商, 而忽視消費者之健康。因此該容忍之第一型錯誤的機率, 就不用太小了。

一觀測值若使 $H_0$ 被拒絕, 此觀測結果便稱爲*顯著的*。要注意的是, 顯著與否, 並非依觀測值的大小, 而是依發生機率之大小。發生機率大的事件, 爲一尋常事件, 不爲顯著事件。所謂尋常事件, 就是看到後不用大驚小怪。發生機率小的事件, 才是顯著事件, 才會導致 $H_0$ 被拒絕。做統計檢定時, 與媒體人一般, 要睜大眼留意是否有顯著事件發生。

由於無罪推定原則, 兩人之間若有爭議, 各說各話, 僵持不下, 則除非證據夠, 否則提起控訴的一方, 不見得有利。我們給一實例。$A$ 公開宣稱他當年所公佈的那卷 XXX 緋聞錄音帶, 是 $B$ 所提供的。$B$獲知後, 控告$A$誹謗。地檢署經調查, 認爲 “並無積極證據證明 $A$ 所說是虛構”, 因此對 $A$ 做出不起訴處分。雖然檢方並未說此即認定錄音帶是 $B$ 交給 $A$ 的, 但媒體刊登的新聞標題, 卻爲 “XXX 緋聞錄音帶, 檢方認定 $B$ 給的”。同樣的道理, 除非跡象顯示假設 $H_0$ 很可疑, 否則不會輕易啟動一個擬推翻 $H_0$ 的統計檢定。

前面說過, 顯著與否, 乃依發生機率之大小, 而非觀測值之大小。底下給一例。

某次總統選舉, 共有 $A$、$B$ 兩組候選人, 競爭激烈。投票結果 $A$ 組得票率 50.114%, 僅比半數的 50%略多一些。落後的 $B$ 組很不服氣, 覺得這麼小的差異, 在統計上是沒有意義的。究竟如此小的領先, 對區分兩組候選人得票有差, 夠不夠顯著, 其實乃與投票人數有關。取 $H_0$ 爲 $A$、$B$ 兩組沒有差異, $H_a$ 爲 $A$ 組獲得之支持度大於 2分之1。先假定投票人數爲 10萬人。則在 $H_0$ 爲真之下, 會得到至少有此領先之機率, 約爲 0.2355, 接近 4分之1, 可說很容易發生。因此這是一相當尋常的事件, 不易據此以拒絕 $H_0$。換句話說, 投票結果顯示 $A$、$B$ 二組候選人所獲得之支持度, 並沒什麼差異。亦即 $B$ 組的支持者不服氣尚有點道理。其次假定投票人數爲 1百萬人, 則在 $H_0$ 爲真之下, 會發生至少有此領先之機率, 約爲 0.0113, 算是很小了, $B$ 組最好就承認敗選。最後假定投票人數爲 1千3百萬人。則在 $H_0$ 爲真之下, 會得到至少這樣領先的機率, 約爲 1.03乘上 10的負 16次方, 即小數點後連續15個0才出現1, 可說微乎其微。因此看到此一投票結果, 還認同兩組候選人之支持度沒有差異的假設, 可說是毫無道理的。換句話說, 在投票人數高達 1千3百萬人之下, $A$ 組得到這樣的領先, 是很顯著的。足以拒絕 $A$、$B$ 兩組沒有差異之 $H_0$ 的假設。

最後必須一提的是, 一般而言, 一項統計檢定, 即使再嚴格, 也無法決定因果關係。民國 97年各高中推薦在校成績前 1%的學生參加 “繁星計畫”, 再經大學挑選, 以進入大學就讀。位於台中縣的常春藤高中, 有 254名高三學生, 報上說 “理論上, 可有 3位學生獲推薦, 結果該校共推薦 31人, 且最後有 11人錄取, 明顯高過正常比例。” 這個 “明顯高過正常比例” , 用統計語言來說, 就是一 “顯著事件”。但統計的功能只能到此, 該校成績究竟是否作假, 必須調出學生原始成績才知。

## 6. 紙上談兵

朝野猶誇紙上兵。紙上談兵本來是比喻有些人只會空談, 不顧實際。戰國時代, 趙國的趙括, 其父趙奢爲一代名將。雖家學淵源, 又自幼熟讀兵書, 能言善辯, 談起軍事頭頭是道。趙奢卻不認爲趙括可領軍, 因 "兵, 死地也, 而括易言之。" 知子莫若父, 趙奢認爲兒子光會紙上談兵, 不知用兵之難。藺相如也曾對趙王說 "括徒能讀其父書傳, 不知合變也"。只是後來趙王仍以趙括代廉頗爲將, 趙括也果真讓趙國大敗, 生平事蹟成爲 "紙上談兵" 成語之由來。

沒有資料則難以做決策。在統計裡, 資料常得仰賴取樣。理論裡的樣本數, 說要多大就多大。想要趨近至無限大, 無限多個樣本彷彿就立即出現在眼前 (這正是紙上談兵)。只是不論醫學上, 或商場上, 有時樣本並不易獲得。而諸如做民調時, 樣本常須在短時間內取得。想要增加樣本數, 往往亦有實際困難。除了樣本不易大量取得, 樣本的偏差, 更會造成決策的失準。例如, 一種新藥被開發出來, 要找些人來做實驗, 能以自願的方式嗎? 不行, 因這樣可能來的比較多是病入膏肓者, 打算死馬當活馬醫。所以通常要將接受實驗者分爲兩組, 一組是處理組 (treatment group), 一組是控制組 (control group)。處理組服用新藥, 控制組則不服用新藥。接受實驗者該屬於何組, 採隨機的方式, 以消除偏差。若無控制組, 如何判定服用此藥後確實有效? 藥效又多大? 又接受實驗者者, 及參與的醫護人員, 都不能知道誰是那一組。免得因一些心理因素, 造成數據的偏差, 因而影響實驗結果。要知通常醫護人員對屬於處理組者, 可能不自覺會對他更關懷。而大家也都知道, 病人若覺特別被照顧, 生存意志可能會大些。因此屬於控制組者, 也要服用一種外觀與新藥一樣, 但毫無任何作用的安慰劑 (placebo)。

不論醫學上的實驗, 或選舉的民調, 都不乏雖大量取樣, 結果卻完全失敗的例子。如何以較經濟的方式, 取得較客觀的樣本, 而能達到同樣 (甚至更佳) 的準確度, 就必須先紙上談兵, 妥善規畫了。不但選擇適當的統計方法很重要, 統計學裡因此也發展出實驗設計 (experimental design)。亦即做實驗以取樣前, 要先設計良好的取樣程序。另外, 因實際數據之不易得, 有時得先模擬產生數據, 紙上談兵一番。看看擬採用的方法到底好不好, 有如軍事上的兵棋推演。不要以爲虛擬的數據, 都是有如海市蜃樓, 不過是幻影。事實上, 只要模擬的好, 對實務常有很大的幫助。淸末黃花崗七十二烈士之一的林覺民, 在 "與妻訣別書" 中, 寫不盡對愛妻的不捨。最後說 "紙短情長, 所未盡者尚有幾萬千, 汝可以模擬得之。" 此愛綿綿無絕期, 要愛妻依據信中所述的內容, 自行揣摩想像其他的萬千字句。連情意都可模擬, 數據當然更能模擬了。林覺民真可說是現代統計模擬的先驅。

統計由於並非只是在紙上談兵, 純做理論的探討。而當實際應用時, 就會有各種成本上的考量, 因而就更需要並非空談之紙上談兵了。

## 結語

1985年 11月, 有位美國學者泰勒 (Gary Taylor, 1953—) 在英國牛津大學 (University of Oxford) 的一圖書館, 找到一首詩, 就稱爲泰勒詩 (Taylor poem) 好了。英美研究莎士比亞 (William Shakespeare, 1564–1616) 的學者們, 爲了此詩是否爲莎士比亞所作, 而大打筆戰。不少專家認爲這首泰勒詩, 不論用字遣詞, 與韻味風格, 都迥異於莎士比亞其他作品。筆戰兩個月後, 1986年 1月 24日出版的 Science 雜誌, 刊登一篇 "莎士比亞的新詩–向統計學禮讚" (Shakespeare's new poem: an ode to statistics), 介紹兩位統計學者 Efron 與 Thisted, 如何以統計方法, 鑑定這首泰勒詩, 是否爲莎士比亞所作。

Efron 與 Thisted 的想法是這樣的: 每個人各有其用字習慣, 特別是對於罕用字, 每個作者使用的習慣, 差異可能更大。莎士比亞已知的總作品中, 共有 884,647個字, 其中有 31,534個相異字。這些相異字中, 有 14,376個字從頭到尾只出現 1次, 有 4,343個字只出現2次。出現幾次的字, 都被計算出來。那些在總作品中, 出現頻率較低的, 就是莎士比亞的罕用字。依據這些資料, 假設這首共 429個字的泰勒詩, 爲莎士比亞所寫, 他們估計會有幾個字, 在總作品中從未出現 (也就是新字), 只出現 1次, 2次, $\cdots$, 一直到曾出現 99次, 都給出估計值。實際情況與估計非常吻合。這樣做還不夠, 會不會當時代的詩人, 用字習慣都差不多? 兩人又找了三位約略與莎士比亞同時代的詩人, 各取其一首詩, 及另取四首莎士比亞的詩, 與這首泰勒詩做比較。經過3種統計檢定, 發現對前三首, 若假設爲莎士比亞的作品, 罕用字出現次數之實際值, 與估計值皆不吻合。而所挑選的四首莎士比亞的詩, 雖偶有不合, 但總的來說, 是可接受的。Efron 及 Thisted 說, 他們的分析, 並無法證明泰勒詩爲莎士比亞所寫, 但在罕用字之使用情況, 如此與莎士比亞的總作品吻合, 確實令人驚訝。

一場文學上的爭論, 經統計學家發聲後, 迅速平息, 難怪要向統計學禮讚了。運用統計方法來做決策, 反映的是一種客觀及合理的思維。要知與其主觀的爭論風格相同否, 彼此都無法說服對方, 還不如以客觀的統計方法來判定。但如何才算已經夠客觀? 除了只檢驗泰勒詩外, Efron 及 Thisted 亦拿幾位與莎士比亞同時代的詩人來比較, 這樣就更保險了。免得萬一莎士比亞那個時期的詩人, 有如時尚般, 罕用字之使用習慣類似, 則此檢定就沒有什麼參考價值了。欲進一步了解此事之來龍去脈, 可參考黃文璋 (1999) 第十七章 "莎士比亞新詩真僞之鑑定", 相關文獻也可在該文找到。

但統計的判定, 是否一出手, 就令人臣服呢?

克萊門斯 (Roger Clemens, 1962–), 外號 "火箭人", 是一位在美國職棒大聯盟, 活躍二十餘年的投手, 被認爲是大聯盟史上最偉大的投手之一。至今他一共獲得七座賽揚獎 (Cy Young Award), 爲歷來得到該獎最多的大聯盟投手。此獎設立於 1956年, 起初每年選出一位。自 1967年起, 兩個聯盟每年各選出一位。能得到一次都不容易了, 何況七次?

克萊門斯在賽揚獎的成就, 大約很難被超越。2003年球季結束後, 克萊門斯宣佈退休, 但隔年便改變心意, 重回大聯盟。且在當年以 42歲 “高齡”, 再度拿下賽揚獎。他自 2007年起效力於紐約洋基隊 (New York Yankees), 成爲王建民隊友。只是由於他的前訓練員麥克納米 (Brain McNamee), 指控他在職業生涯的後期, 服用類固醇 (steroid) 及生長激素 (human growth hormone), 於是美國國會進行調查。克萊門斯當然要盡力維護其聲譽, 一世英名豈能毀於一旦? 他聘請的專家爲他整理出一份長達 45頁的報告, 包含 38個圖表, 想爲他洗清冤屈, 證明他是老而彌堅, 而非依靠禁藥之助。只是一份報告的價值, 當然不是以厚度來度量。曾有得諾貝爾經濟獎的論文, 只有二十多頁。4位美國賓州大學 (University of Pennsylvania) 華頓學院 (Wharton School) 的統計以及經濟教授, 仔細檢視後, 認爲這份報告, 對讓人相信克萊門斯的無辜, 並無說服力。

究竟克萊門斯在職業生涯的後期, 仍虎虎生威, 是否爲*極不尋常* (highly unusual) 的事件? 如果是的話, 則他的前訓練員所宣稱的, 自 1998年起, 替克萊門斯注射生長激素, 就可能爲真。爲了化解此疑慮, 在克萊門斯所自行提出的這份報告中, 將他自己, 與在 1993年 46歲時退休的名投手萊恩 (Nolan Ryan) 進行對比。資料顯示, 克萊門斯的表現看起來沒什麼不尋常, 兩人都是在 40多歲時達到顛峰。再將克萊門斯與另外兩位同時代的投手詹森 (Randy Johnson), 及席林 (Curt Schilling) 相比, 結果也類似。一切似乎無懈可擊。數據會說話, 該還克萊門斯清白了吧!

這 4位專家可不買這些數據的帳。他們指出, 報告中僅是將克萊門斯與那些 “在職業生涯第二階段獲得成功的投手” 相比較, 而不是與所有跟克萊門斯一樣, 在菜鳥階段就揚名立萬的投手相比。在統計學裡, 稱此爲 “*選擇偏差*” (selection bias)。一旦比較的對象精心挑選, 克萊門斯的數據, 沒有顯得不正常就不稀奇了。這 4位教授的文章, 發表在銷路廣大的 “紐約時報” (New York Times, 2008年 2月 10日), 題目是 “支持克萊門斯的報告乃精心挑選真相” (Report Backing Clemens Chooses Its Facts Carefully)。口說無憑, 4位專家另起爐灶, 分析自 1968年起, 大聯盟 31位優異的投手之生涯投球數據。相對於這較大的比較群, 克萊門斯的數據, 就顯得異常了。一般投手的表現, 都是初期逐漸成長, 在 30歲左右達到高峰。之後大約自35歲起, 便廉頗老矣, 表現就逐漸走下坡。但克萊門斯卻不然, 他的表現在快達 30歲時下降, 而在 35歲至 40歲間又呈現成長, 老幹贏新枝, 顯得極爲不尋常。4位專家的分析, 自然無法證明克萊門斯, 在球員生涯之後期服用禁藥。統計並非萬能, 不見得回回能一言而爲天下法。但他們使克萊門斯自行聘請的專家, 所做之報告黯然失色, 並使克萊門斯仍無法自服用禁藥的疑雲風波脫身。統計的威力, 仍再度顯現。

本文一開始說 “有三種謊言: 謊言, 可惡的謊言, 及統計”。統計爲何被當做謊言呢? 可惡的謊言已夠可惡了, 難道統計是更可惡的謊言? 上二例已足以說明。統計的結論要有價值, 要被人採信, 其中涉及的每一程序, 從設計, 取樣到分析, 都要竭盡所能, 儘量客觀。統

計學家會犯錯, 因所有保證都是機率式的, 並附帶一定的犯錯機率。決策若不願犯錯, 後果不見得就好。法庭若不願犯錯, 可能使大部分明明有罪的人, 都被釋放。但機率理論也告訴我們, 如果統計分析是遵循該有的程序, 則長期下來, 犯錯次數的比例, 差不多就是所設定的犯錯機率, 乃可容忍。但分析過程中, 若有意或無意的偏差, 則即使工程再浩大, 得到的結論, 不但無法取信真正的專家, 被當成謊言不說, 有時還給自己製造出極不利的後果。

統計, 正如我們的思維, 客觀至上, 否則便是自欺欺人。反之我們的思維若是統計式的, 便是極客觀的。

## 參考文獻

1. 黃文璋, 隨機與密碼, 數學傳播季刊, 28(2), p.3-17, 2004。
2. 黃文璋, 數學欣賞, 華泰文化事業公司, 台北, 1999。
3. Bradlow Eric, Jensen Shane, Wolfers Justin and Wyner Adi, Report Backing Clemens Chooses Its Facts Carefully, New York Times, February 10, 2008.

—本文作者任教國立高雄大學應用數學系—